



Capítulo 6:

Funções Inversas

Introdução

Algebricamente, uma função é definida como um conjunto de pares ordenados $\{(x, y)\}$ em que cada primeiro elemento x aparece associado a um único segundo elemento y . Não existem dois pares em que o mesmo x forme par com dois valores de y diferentes.

Uma função inversível é um mapeamento sobrejetivo e um-para-um, de maneira que cada x forma par com um único y . Ou seja, não há dois valores de x diferentes formando par com um mesmo y .

Sendo assim, a função inversa é o conjunto de pares ordenados $\{(y, x)\}$ em que a ordem dos membros foi invertida.

Quando estas definições são aplicadas a funções definidas por regras que operam sobre conjuntos de números reais, a caracterização de $g(x)$, a função inversa de $f(x)$, dá-se pela composição de $f(x)$ e $g(x)$, tendo como resultado a função identidade $h(x) = x$, de forma que

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

A propriedade da troca de coordenadas das funções inversas implica que os gráficos da função $f(x)$ e sua inversa $g(x)$ tornam-se reflexões um do outro sobre a reta $y = x$.

Neste capítulo, estudaremos as inversas de algumas funções elementares, incluindo $\ln(x)$, a função inversa da função exponencial e^x .

Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

número complexo	reízes redundantes	inversível	positivo
composição	ponto flutuante	logaritmo	equação quadrática
domínio	função	negativo	fórmula quadrática
expoente	função identidade	um-a-um	número real
exponencial	aumentando	sobrejeção	reflexão
exponenciar	função inversa	parábola	simetria

Problemas Típicos

6.1. Seja $f(x) = x^2 + 2x + 2$ tendo como [domínio](#) os [números reais](#) x que satisfazem $x > -1$.

- (a) Explique o papel da restrição $x > -1$ no domínio de $f(x)$.
- (b) Encontre $g(x)$, o [funcional inverso](#) de $f(x)$.
- (c) Trace o gráfico de $f(x)$, $g(x)$, e da reta $y = x$ sobre o mesmo conjunto de eixos.
- (d) Verifique que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.

6.2. Verifique analiticamente que $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x > 1$, é sua própria [função inversa](#).

6.3. Mostre que, para todo x real, a inversa de $f(x) = e^x$ é a função $g(x) = \ln(x)$ com domínio $x > 0$.

6.4. Resolva a equação $e^{4x+1} = 3$.

6.5. Resolva a equação $\ln(x+1) + \ln(x+2) = 3$.

Inicializações do Maple

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

Inic...

Soluções

Problema 6.1

6.1 - Solução Matemática

6.1 (a) - Solução Matemática

A restrição do domínio de $f(x) = x^2 + 2x + 2$ aos números reais $x, x > -1$, gera uma função crescente e, portanto, um-para-um. Tal função é inversível.

6.1 (b) - Solução Matemática

Para encontrar $g(x)$, a função inversa de $f(x)$, deve-se

1) igualar y a $f(x)$, obtendo-se $y = x^2 + 2x + 2$;

2) resolver a equação para x , o que pode ser feito por meio da fórmula quadrática. Na verdade, escreve-se

$$0 = x^2 + 2x + 2 - y$$

de forma que

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{(-2)^2 - 4(2-y)}}{2} = -1 + \sqrt{y-1}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{(-2)^2 - 4(2-y)}}{2} = -1 - \sqrt{y-1}$$

Como x deve satisfazer $x > -1$, deve-se escolher a raiz que não é sempre negativa. Portanto, a primeira é a escolha correta.

3) trocando-se as letras, obtém-se de

$$x = \sqrt{y-1} - 1$$

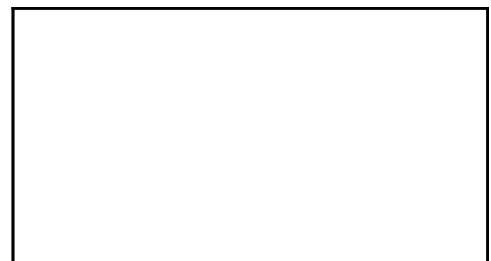
a função inversa

$$y = g(x) = \sqrt{x-1} - 1$$

6.1 (c) - Solução Matemática

A Figura 6.1.1 contém os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e da reta $y = x$ que foram gerados pelo Maple.

Note que o gráfico de $g(x)$, a inversa de $f(x)$, é a reflexão do gráfico de $f(x)$ sobre a



reta $y = x$.

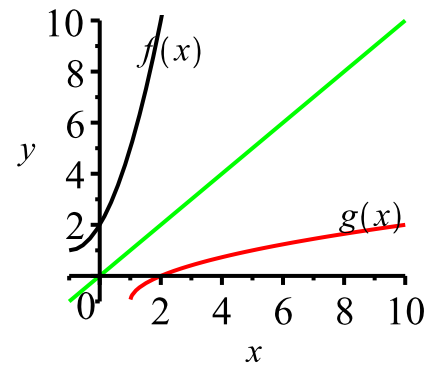


Figura 6.1.1 Gráfico de $f(x)$, $g(x) = f^{-1}(x)$, e a reta $y = x$

6.1 (d) - Solução Matemática

Para verificar que $f(x) = x^2 + 2x + 2$ e $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$ são funções inversas, deve-se mostrar que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$. Desta maneira, tem-se

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (\sqrt{x-1} - 1)^2 + 2(\sqrt{x-1} - 1) + 2 \\ &= x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + 2\sqrt{x-1} - 2 + 2 \\ &= x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt{(x^2 + 2x + 2) - 1} - 1 \\ &= \sqrt{(x+1)^2} - 1 \\ &= |x+1| - 1 \end{aligned}$$

Contudo, o domínio de $f(x)$ está restrito a $x > -1$, de forma que $|x+1| = x+1$. Portanto, $g(f(x)) = x$.

6.1 - Solução via Maplet

6.1 (a) - Solução via Maplet

O problema 6.1 refere-se à função inversa da função

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$x \geq -1$$

O papel da restrição $x > -1$ no **domínio** de $f(x)$ pode ser explicado com a ajuda do [Tutorial Funções Inversas #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.1.2.

O gráfico de $f(x)$ sobre o domínio dado é **crescente** e, portanto, **um-para-um**. Isto torna $f(x)$, como definido, **inversível**.

Para iniciar o **Tutorial de Funções Inversas #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Inversas #1](#).

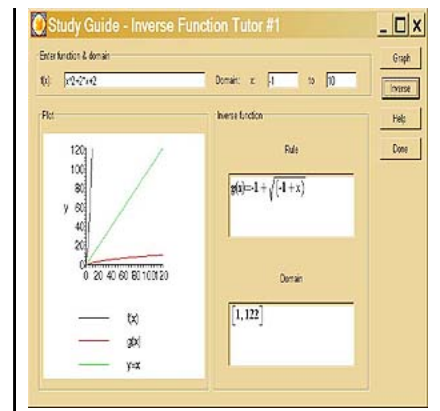


Figura 6.1.2 Imagem do Tutorial Funções Inversas

6.1 (b) - Solução via Maplet

O problema 6.1 refere-se à **função inversa** da função

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$x \geq -1$$

A função inversa de $f(x)$ pode ser encontrada por meio do [Tutorial Funções Inversas #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.1.2 na Parte (a).

Ao clicar-se sobre o botão **Inversa**, são executados os seguintes passos

- 1) Faça y igual a $f(x)$
- 2) Resolva para x
- 3) Troque as letras

para o cálculo da regra para $g(x)$, a função inversa de $f(x)$. (Os detalhes destes cálculos são encontrados na Parte (b) da **Solução Matemática** do Problema 6.1.

Para iniciar o **Tutorial de Funções Inversas #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Inversas #1](#).

6.1 (c) - Solução via Maplet

O problema 6.1 refere-se à função inversa da função

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$x \geq -1$$

O gráfico de $f(x)$, de sua função inversa $g(x)$ e da reta $y = x$ são apresentados no [Tutorial Funções Inversas #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.1.2 na Parte (a).

Para iniciar o **Tutorial de Funções Inversas #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Funções Inversas #1](#).

6.1 (d) - Solução via Maplet

O problema 6.1 refere-se à função inversa da função

$$f(x) = x^2 + 2x + 2, x \geq -1$$

A verificação de que a regra para $g(x)$, calculada na parte (b), é realmente a função inversa de $f(x)$, consiste em mostrar que

$$f(g(x)) = x = g(f(x))$$

Estes cálculos são realizados no [Tutorial Funções Inversas #2](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.1.3.

Os botões $f(g(x))$ e $g(f(x))$ implementam os respectivos cálculos e mostram o resultado, x , na janela apropriada.

Para iniciar o **Tutorial Funções Inversas #2**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Inversas #2](#).

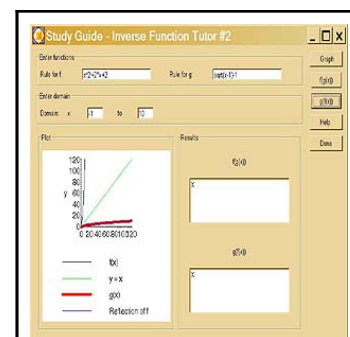


Figura 6.1.3 Imagem do Tutorial Funções Inversas #2

6.1 - Solução Interativa

Defina $f(x)$ como uma função	
• Insira a equação $f(x) = x^2 + 2x + 2$ • Menu de Contexto: Associe a Função	
Resolva $y = f(x)$ para $x = x(y)$	

• Escreva a equação $y = f(x)$ • Menu de Contexto: Resolver>Obter Soluções para x	
Definir a função $g(y) = x(y)$	
• Escreva $g(y) =$ e complete por Control-arrastar a solução apropriada para x • Menu de Contexto: Associe a Função	
Obtenha Figura 6.1.1	
• Insira $f(x)$, $g(x)$, x e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos>Construtor de Gráficos - $1 \leq x \leq 10$ Opções: (Imagem de) - $1 \leq y \leq 10$	
Verificações	
• Insira $f(g(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Simplifique>Simplifique	
Insira $g(f(x))$ e pressione a tecla Enter. Menu de Contexto: Fator Menu de Contexto: Simplifique>Assumindo Positivo	

▼ 6.1 - Solução via Comandos do Maple

▼ Inversibilidade

A regra para a função $f(x)$ é definida como uma função do Maple

> $f := x \rightarrow x^2 + 2x + 2 :$
 $f'(x) = f(x)$

tendo como domínio o conjunto dos números reais x que satisfazem $x \geq -1$.

Ao se traçar a expressão para esta regra em um domínio maior do que o definido, obtém-se o gráfico da Figura 6.1.4.

```
> p1 := plot(f(x), x=-4..2, 0..10, ytickmarks=4) :
p2 := arrow([-3, 0], <0, 5>, .2, .4, .1, color
=blue) :
p3 := arrow([1, 0], <0, 5>, .2, .4, .1, color=blue) :
p4 := arrow([-3, 5], <3, 0>, .3, .5, .1, color
=green) :
```

```
p5 := arrow([1, 5], [-1, 0], .3, .5, .2, color
            = green) :
display([p || (1..5)])
```

Figura 6.1.4 Em $-\infty < x < \infty$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$ não é um-para-um, e portanto, não invertível

O gráfico é uma parábola cujo vértice encontra-se no ponto $(-1, -1)$. Em geral, a regra $y = x^2 + 2x + 2$ mapeia dois valores x para cada y . Então essa regra não define uma função um-para-um e não é invertível. Sobre o domínio restrito $x \geq -1$, esta regra define uma função crescente que é então um-para-um e invertível.

Sobre o domínio restrito $x \geq -1$, a regra $y = x^2 + 2x + 2$ define uma função crescente $f(x)$ que é então um-para-um e portanto invertível naquele domínio.

Obtendo a Inversa

Para obter-se a função inversa, deve-se aplicar os três passos a seguir.

- 1) Faça y igual a $f(x)$
- 2) Resolva para x
- 3) Troque as letras

O primeiro e o segundo passos estão implementados juntos, resultando

```
> s1 := solve(y=f(x), x)
```

Como x deve satisfazer $x > -1$, deve-se selecionar a solução que não é sempre negativa. Neste caso, é a primeira solução, selecionada pelo comando

```
> X := s1[1]
```

Trocando-se as letras, tem-se

```
> Y := eval(X, y=x)
```

Portanto, a regra para a função inversa é dada por

$$y = \sqrt{x - 1} - 1$$

que é expressa como uma função do Maple por

```
> g := unapply(Y, x) :
'g'(x) = g(x)
```

A Figura 6.1.5 mostra um gráfico de $f(x)$, da função inversa e da reta $y = x$.

```
> p6 := plot(f(x), x=-1..2, color=black) :
    p7 := plot(x, x=-1..10, color=green) :
    p8 := plot(g(x), x=-1..10, color=red) :
    display([p || (6..8)], scaling=constrained)
```

Figura 6.1.5 Gráfico de $f(x)$ (preto), $g(x) = f^{-1}(x)$ (vermelho), e a reta $y = x$ (verde)

Se o gráfico de $f(x)$ for refletido sobre a reta $y = x$, a **reflexão** coincidirá com o gráfico da inversa de $f(x)$. Isto pode ser visto se o comando **reflect** do pacote *plottools* for usado. Este comando reflete um gráfico sobre a reta, sendo esta especificada como uma lista de dois pontos da reta.

```
> p9 := reflect(p6, [[0, 0], [1, 1]]) :
    p10 := plot(g(x), x=-1..10, color=red, thickness=3) :
    display([p10, p9], scaling=constrained)
```

Figura 6.1.6 Gráfico de $g(x) = f^{-1}(x)$ (vermelho), e (em preto) a reflexão $f(x)$ sobre a reta $y = x$ (verde)

Os gráficos da reflexão sobre $f(x)$ e da inversa de $f(x)$ coincidem.

Verificando a Inversa

Para verificar analiticamente que a inversa correta foi encontrada, deve-se mostrar que as **composições** $f(g(x))$ e $g(f(x))$ reduzem-se à função identidade. Sendo assim, deve-se mostrar que

$$f(g(x)) = x$$

e

$$g(f(x)) = x$$

são válidas. A primeira identidade é mostrada no Maple por

```
> simplify(f(g(x)))
```

enquanto a segunda é verificada por

```
> simplify(g(f(x))) assuming x ≥ -1
```

Problema 6.2

▼ 6.2 - Solução Matemática

Para demonstrar que $f(x) = \frac{x}{x-1}$ é sua própria **inversa**, deve-se escrever $g(x) = \frac{x}{x-1}$, mostrando-se então

$$f(g(x)) = g(f(x)) = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\frac{x}{x-1} - 1\right)} = \frac{x}{x - (x-1)} = \frac{x}{1} = x$$

▼ 6.2 - Solução via Maplet

Para verificar que a função

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad x > 1$$

é sua própria **inversa**, deve-se mostrar que $f(f(x)) = x$. Esta verificação pode ser feita com o [Tutorial Funções Inversas #2](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.2.1.

Os botões $f(g(x))$ e $g(f(x))$ implementam os respectivos cálculos e mostram o resultado, x , na janela apropriada.

Para iniciar o **Tutorial Funções Inversas #2**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Inversas #2](#).

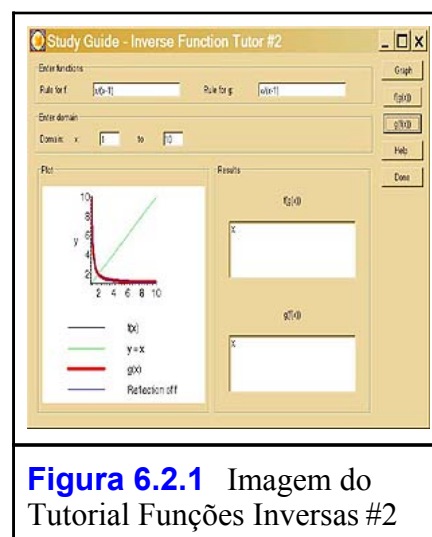


Figura 6.2.1 Imagem do Tutorial Funções Inversas #2

▼ 6.2 - Solução Interativa

Re-inicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
• Insira a equação $f(x) = \frac{x}{x-1}$ • Menu de Contexto: Associe a Função		
• Insira $f(f(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Simplifique>Simplifique		

Faça o gráfico de $f(x)$	
• Insira $f(x)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $0 \leq x \leq 10$ Opções: (Imagem de) $0 \leq y \leq 10$ Escala Restrita • Control-arrastar x no gráfico	

6.2 - Solução via Comandos do Maple

As regras para a função $f(x)$ e sua inversa $g(x) = f^{-1}(x)$ (dada pela mesma regra de $f(x)$) são descritas como funções do Maple por meio da notação

```
> f := x -> x / (x - 1) :
g := x -> x / (x - 1) :
'f'(x) = f(x);
'g'(x) = g(x)
```

A verificação de que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ consiste nos dois cálculos a seguir.

```
> simplify(f(g(x)));
simplify(g(f(x)))
```

Portanto, $g(x) = f(x)$ é a inversa de $g(x)$.

A figura 6.2.2 mostra a simetria forte exibida pela função $f(x)$ para que possa ser sua própria inversa.

```
> p11 := plot(f(x), x = 1 .. 10, y = 0 .. 10, color
= black) :
p12 := plot(x, x = 0 .. 10, color = green) :
display([p11, p12], scaling = constrained)
```

Figura 6.2.2 Gráfico de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e a reta $y=x$

Problema 6.3

6.3 - Solução Matemática

Se a função logaritmo foi definida como a inversa da função exponencial, então as

composições $e^{\ln(x)} = x = \ln(e^x)$ são identidades. Porém, se esta for definida por algum outro processo, então a validade destas identidades deverá ser demonstrada. Contudo, anteriormente a um curso de cálculo integral, o logaritmo é geralmente definido como o inverso da função exponencial e estas composições reduzem-se a x , por definição.

Desta maneira, dada a exponencial $a = e^b$, tem-se que o logaritmo de a com base b é definido como o expoente ao qual e deve ser elevado a fim de obter-se a . Obviamente, este expoente deve ser b , e escreve-se $\log_e(a) = b$ ou, de forma mais simples, $\ln(a) = b$. Consequentemente, para que se obtenha x como resultado, e deve ser elevado ao expoente que produz x . Este é o significado da primeira composição $e^{\ln(x)} = x$.

A segunda composição pode ser demonstrada por meio de uma das propriedades da função log para quantidades reais. Escreve-se

$$\ln(e^x) = x \ln(e)$$

utilizando-se a regra da multiplicação

$$\log(A^B) = B \log(A)$$

para logaritmos reais. Portanto, $\ln(e) = 1$, pois e deve ser elevado ao expoente 1 para que se obtenha e . Por fim, obtém-se

$$\ln(e^x) = x \ln(e) = x (1) = x$$

6.3 - Solução via Maplet

Para mostrar que, tendo-se x real, a inversa de $f(x) = e^x$ é a função $g(x) = \ln(x)$ com domínio $x > 0$, pode-se usar o [Tutorial Funções Inversas #2](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.3.1.

Após a inserção das regras $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$, deve-se clicar sobre os botões $f(g(x))$ and $g(f(x))$ a fim de obter-se o valor de x válido em cada caso.

Ao clicar-se sobre o botão **Gráfico**, é gerado um gráfico de $f(x)$ em preto, outro de $g(x)$ em vermelho, a reta $y = x$ em verde e a reflexão de $f(x)$ sobre $y = x$ em azul. Esta reflexão coincide com o gráfico de $g(x)$, fornecendo, então, evidência visual adicional de que $g(x)$ é a função inversa de $f(x)$.

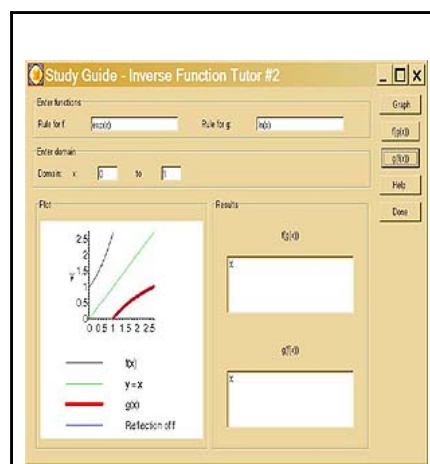


Figura 6.3.1 Imagem do Tutorial Funções Inversas #2

Para iniciar o **Tutorial Funções Inversas #2**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Inversas #2](#).

▼ 6.3 - Solução Interativa

Re-inicialize o Maple apertando o botão à direita.	I...
Observação: Como inserir e^x No Maple, o nome formal da função exponencial e^x é exp(x). Quando estamos trabalhando no modo Math esta função pode ser inserida com seu nome formal, ou como e^x, onde a letra "e" deve ser inserida em uma das seguintes formas. - No modo Math, digite e e use o Completamento de Comando para selecionar a exponencial "e" da janela. O Completamento de Comando está disponível no menu Ferramentas como "Completar Comando" O Completamento de Comando a partir do teclado: CTRL Barra de Espaço (PC) com um equivalente para o sistema Mac. - Selecione e das Constantes e da paleta de Símbolos. - Selecione e da paleta dos Símbolos Comuns.	
- Escreva $f(x) = e^x$ - Menu de Contexto: Associe a Função	
- Escreva $g(x) = \ln(x)$ - Menu de Contexto: Associe a Função	
Insira $f(g(x))$ e pressione a tecla Enter.	
- Insira $g(f(x))$ e pressione a tecla Enter. - Menu de Contexto: Simplifique > Assumindo Positivo	

▼ 6.3 - Solução via Comandos do Maple

Pode-se mostrar que $g(x) = \ln(x)$, $x > 0$, é a **inversa** de $f(x) = e^x$, x **real**, ao verificar-se que as **composições** $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são simplificadas em x . Para observar isto no Maple, deve-se inserir ambas as funções como

```
> f := exp :
    g := ln :
    'f'(x) = f(x);
    'g'(x) = g(x)
```

A composição $f(g(x)) = e^{\ln(x)}$ é obtida no Maple com

```
> f(g(x))
```

Note que a simplificação em x é imediata.

A composição $g(f(x)) = \ln(e^x)$ é obtida no Maple por

```
> g(f(x))
```

Esta composição não é simplificada automaticamente em x , pois tal simplificação só é válida para x real, e o Maple é projetado para torná-la correta inclusive para números complexos. Para indicar que x é real, usa-se

```
> g(f(x)) assuming x :: real
```

Sabendo-se de antemão a necessidade de trabalhar-se apenas com quantidades reais, pode-se instalar o pacote *RealDomain*. O comando

```
> with(RealDomain) :
```

informa ao Maple que as novas quantidades devem ser tratadas como reais. Porém, ao inserirmos

```
> g(f(x))
```

as funções f e g serão tratadas em sua ampla generalidade, pois foram definidas antes que o pacote *RealDomain* tivesse sido iniciado. Contudo, se inserirmos

```
> ln(exp(x));
restart
```

notaremos que a simplificação em x é imediata.

▼ Problema 6.4

▼ 6.4 - Solução Matemática

A equação

$$e^{4x+1} = 3$$

é resolvida ao tomar-se o logaritmo natural em ambos os lados. Isto resulta na equação

$$\ln(e^{4x+1}) = \ln(3)$$

Para logaritmos de quantidades positivas, a regra da multiplicação

$$\ln(A^B) = B \ln(A)$$

pode ser aplicada, resultando

$$(4x + 1) \ln(e) = \ln(3)$$

Como $\ln(e) = 1$, tem-se, imediatamente,

$$4x + 1 = \ln(3)$$

de onde segue que

$$4x = \ln(3) - 1$$

e

$$x = \frac{\ln(3) - 1}{4}$$

6.4 - Solução via Maplet

Uma solução da equação

$$e^{4x+1} = 3$$

pode ser obtida com o [Tutorial Funções Inversas #3](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.4.1.

Após inserir a equação, deve-se clicar sobre o botão **Gráfico** a fim de obter-se um gráfico do lado esquerdo da equação, em preto, e outro gráfico do lado direito, em vermelho. A interseção destas duas curvas fornece a solução desejada.

Para obter-se a solução analítica da equação, é preciso fazer a escolha apropriada entre os botões **Exponencial de ambos os lados** ou **Log Natural de ambos os lados**.

(No problema 7.4 a escolha correta é a última.)

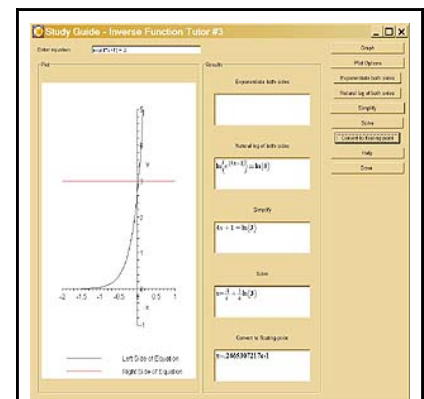


Figura 6.4.1 Imagem do Tutorial Funções Inversas #3

O botão **Simplificar** simplificará o logaritmo no lado esquerdo da equação gerada pela aplicação dos botões anteriores. O botão **Resolver** produzirá o valor exato de x que satisfaz a equação dada, enquanto o botão **Converter para ponto flutuante** resultará na solução em número decimal.

Para iniciar o **Tutorial Funções Inversas #3**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Inversas #3](#)

▼ 6.4 - Solução Iterativa

Re-inicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
▼ Observação: Como inserir e^x No Maple, o nome formal da função exponencial e^x é exp(x). Quando estamos trabalhando no modo Math esta função pode ser inserida com seu nome formal, ou como e^x, onde a letra "e" deve ser inserida em uma das seguintes formas. • No modo Math, digite e e use o Completamento de Comando para selecionar a exponencial "e" da janela. O Completamento de Comando está disponível no menu Ferramentas como "Completar Comando" O Completamento de Comando a partir do teclado: CTRL Barra de Espaço (PC) com um equivalente para o sistema Mac. • Selecione e das Constantes e da paleta de Símbolos. • Selecione e da paleta dos Símbolos Comuns.		
Solução Exata		
• Insira $e^{4x+1} = 3$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver>Resolver • Menu de Contexto: Selecionar Elemento>1 • Menu de Contexto: Aproximar>10		
Solução Numérica		
• Insira $e^{4x+1} = 3$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver>Resolver		

Numericamente	
Solução Passo a Passo	
• Insira $e^{4x+1} = 3$ • Menu de Contexto: Manipule Equação Aplicar ln a ambos os lados Retornar Passos • Menu de Contexto: Simplifique > Assumindo Positivo Adicione - 1 a ambos os lados Multiplique ambos os lados por 1/4 Retorne Passos	

▼ 6.4 - Solução via Comandos do Maple

Insira a equação $e^{4x+1} = 3$	> $q := \exp(4x + 1) = 3$
Resolva a equação.	> $X := \text{solve}(q, x)$
Forma de ponto-flutuante da solução exata:	> $\text{evalf}(X)$
Solução Numérica:	> $\text{fsolve}(q, x)$
Resolva a equação passo a passo	
Calcule o <u>logaritmo natural</u> de ambos os lados da equação.	> $q1 := \text{map}(\ln, q)$
Mova o <u>expoente</u> em e na frente do logaritmo.	> $q2 := \text{simplify}(q1) \text{ assuming } x :: \text{real}$
Subtraia 1 de cada lado.	> $q3 := q2 - (1 = 1)$
Divida ambos os lados por 4.	> $q3/4$

▼ Problema 6.5

▼ 6.5 - Solução Matemática

A equação

$$\ln(x + 1) + \ln(x + 2) = 3$$

é resolvida pela combinação dos dois logaritmos à esquerda, usando-se a regra

$$\ln(A) + \ln(B) = \ln(A B)$$

válida, contanto que todos os logaritmos permaneçam reais. Isto resulta em

$$\ln((x + 1)(x + 2)) = 3$$

de onde o logaritmo à esquerda é removido pela exponenciação em ambos os lados. Tem-se, portanto,

$$e^{\ln((x + 1)(x + 2))} = e^3$$

Como as funções exponencial e log são inversas, o lado esquerdo pode ser simplificado em $(x + 1)(x + 2)$, por definição, e a equação torna-se

$$(x + 1)(x + 2) = e^3$$

Expandindo-se o produto à esquerda, obtém-se

$$x^2 + 3x + 2 = e^3$$

ou, a equação quadrática

$$x^2 + 3x + 2 - e^3 = 0$$

A aplicação da fórmula quadrática resulta nas duas soluções

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2 - e^3)}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{1 + 4e^3}}{2} = 3.00949$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2 - e^3)}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{1 + 4e^3}}{2} = -6.00949$$

onde as aproximações são dadas por um mecanismo de cálculo apropriado.

A segunda solução da equação quadrática, ou seja, o número negativo, não é uma solução da equação original. Se esse número negativo fosse substituído por x na equação original, apareceria o logaritmo de um número negativo. A simplificação induzida pelo uso da regra da multiplicação não é válida para tais logaritmos e, portanto, a segunda solução da equação quadrática não é uma solução da equação original.

▼ 6.5 - Solução via Maplet

Uma solução da equação

--

$$\ln(x + 1) + \ln(x + 2) = 3$$

pode ser obtida com o [Tutorial Funções Inversas #3](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 6.5.1.

Após inserir a equação, deve-se clicar sobre o botão **Gráfico** a fim de obter-se um gráfico do lado esquerdo da equação, em preto, e outro gráfico do lado direito, em vermelho. A interseção destas duas curvas fornece a solução desejada.

Para obter-se a solução analítica da equação, é preciso fazer a escolha apropriada entre os botões **Exponencial de ambos os lados** ou **Log Natural de ambos os lados**.

(No problema 7.5 a escolha correta é a última.)

O botão **Simplificar** simplificará o **logaritmo** no lado esquerdo da equação gerada pela aplicação dos botões anteriores. O botão **Resolver** produzirá o valor exato de x que satisfaz a equação dada, enquanto o botão **Converter para ponto flutuante** resultará na solução em número decimal.

Para iniciar o **Tutorial Funções Inversas #3**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Inversas #3](#).

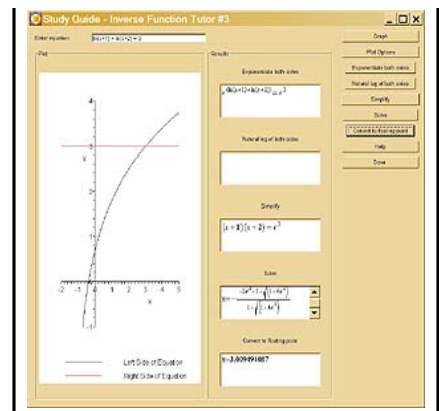


Figura 6.5.1 Imagem do Tutorial Funções Inversas #3

▼ 6.5 -Solução Interativa

Solução Exata	
• Insira $\ln(x + 1) + \ln(x + 2) = 3$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver>Obter Soluções para x • Menu de Contexto: Aproximar>10	
Solução Numérica Direta	
• Insira $\ln(x + 1) + \ln(x + 2) = 3$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver>Resolver Numericamente	
Obtenha o gráfico da Figura 6.5.1	
• Insira $\ln(x + 1) + \ln(x + 2)$, o lado esquerdo da equação. • Menu de Contexto: Gráficos>Construtor de Gráficos • Control-arraste o número 3 no gráfico.	

Solução Passo a Passo	
• Insira $\ln(x + 1) + \ln(x + 2) = 3$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Manipule Equação - Aplicar exp a ambos os lados - Aplicar simplificação em ambos os lados - Aplicar expandir no lado esquerdo - Adicione -2 em ambos os lados - Adicionar $(3/2)^2 = 9/4$ a ambos os lados - Aplicar fatoração no lado esquerdo - Tomar a raiz quadrada em ambos os lados - Escolha a raiz com $+\sqrt{\quad}$ - Adicione -3/2 em ambos os lados - Retorne Passos • Menu de Contexto: Aproximar > 10	

▼ 6.5 - Solução via Comandos do Maple

Insira a equação.	> $q := \ln(x + 1) + \ln(x + 2) = 3$
Desenhe a Figura 6.5.2, um gráfico do lado esquerdo (em negro) e o lado direito (em vermelho). Uma solução para a equação existe em qualquer interseção entre as duas curvas. Existe, no mínimo, uma solução para a equação, aproximadamente $x = 3$, encontrada ao clicar-se sobre a interseção das curvas vermelha e preta e ao observar-se as coordenadas no canto superior esquerdo da tela.	
> <code>plot([lhs(q), rhs(q)], x=-3..10, color=[black, red], legend=["Lado Esquerdo da Equação", "Lado Direito da Equação"]);</code> Figura 6.5.2 Gráfico de $y = \ln(x + 1) + \ln(x + 2)$ e $y = 3$	
Obtenha uma solução exata.	> $X := \text{solve}(q, x)$
Converta esta solução exata na forma de ponto flutuante.	> $\text{evalf}(X)$
Encontre a solução numérica diretamente.	> $\text{fsolve}(q, x)$
Resolva a equação passo a passo	

Combine os dois logs na esquerda com a regra $\ln(A) + \ln(B) = \ln(A B)$ válida para logaritmos reais.	> $q1 := combine(q)$ assuming $x > -1$
Tire exponencial de ambos os lados da equação resultante.	> $q2 := map(exp, q1)$
Multiplique os fatores na esquerda.	> $q3 := expand(q2)$
Leve todos os termos para a esquerda.	> $q4 := q3 - exp(3)$
Resolva a equação quadrática resultante.	> $QX := solve(q4, x)$
Expresse as duas soluções exatas na forma de ponto flutuante.	> $evalf([QX])$
Note que há duas soluções para a equação quadrática, mas apenas uma satisfaz à equação original. O número <u>negativo</u> não é uma solução da equação original, pois a substituição deste valor em $\ln(x + 1)$ ou $\ln(x + 2)$ resultará no log de um número negativo. Como o logaritmo de um número negativo é um <u>número complexo</u>, a solução negativa da equação quadrática não pode ser uma solução da equação original. Esta <u>solução redundante</u> foi introduzida quando os logaritmos foram combinados por meio da regra $\ln(A) + \ln(B) = \ln(A B)$ que é válida, contanto que os logaritmos permaneçam <u>reais</u>.	

▼ Exercícios - Capítulo 6

Para cada função $f(x)$ dada nos exercícios 6.1-6.10,

- (a) encontrar $g(x)$, o funcional inverso para $f(x)$;
- (b) traçar o gráfico de $f(x)$, $g(x)$ e da reta $y = x$ no mesmo conjunto de eixos;
- (c) verificar que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.

Se nenhuma restrição for imposta sobre a regra para $f(x)$, então o domínio é o maior conjunto de números reais para os quais a regra está definida.

6.1. $f(x) = 3x - 5$

6.2. $f(x) = 2 - 7x$

6.3. $f(x) = x^2 + 6x + 45, x > -\frac{1}{3}$

$$6.4. f(x) = 6 - x - x^2, x > -\frac{1}{2}$$

$$6.5. f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

$$6.6. f(x) = \frac{10}{x^2 + 10x + 25}, x > -5$$

$$6.7. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x > 0$$

$$6.10. f(x) = x^{2/3}, x > 0$$

Resolver as equações nos exercícios 6.11 - 6.17. Certifique-se de que as respostas obtidas são, de fato, soluções das equações originais e não soluções redundantes geradas pelo processo de solução.

$$6.11. 4e^{3x-1} = 5$$

$$6.12. 5e^{2-3x} = e^{3-2x}$$

$$6.13. 3e^{2x^2} = 2e^{3x}$$

$$6.14. \ln(5x - 4) + \ln(6x + 1) = \ln(7x + 3)$$

$$6.15. \ln(2x^2 + 1) = 1$$

$$6.16. \ln(3x + 2) - 2\ln(4x - 7) = 1$$

$$6.17. 2\ln(5x - 4) = 2\ln(6x + 1) - 1$$

6.18. Propõe-se resolver a equação

$$5e^{-4x} = 7e^{6x^2} + 3$$

usando-se os passos listados abaixo. Determinar se o cálculo está correto. Caso esteja incorreto, encontrar e explicar o erro.

$$\ln(5) - 4x = \ln(7) + 6x^2 + \ln(3)$$

$$6x^2 + 4x + \ln\left(\frac{21}{5}\right) = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(6)\ln\left(\frac{21}{5}\right)}}{12}$$



SOLUÇÕES INTELIGENTES PARA FAZER MATEMÁTICA

www.aprendanet.com.br - vendas@aprendanet.com.br

Tel.: 24-2231-3549 - Fax.: 24-2237-0625